Теория 3. Какая теорема обеспечивает гиперболичность компактной ориентированной двумерной замкнутой поверхности? Привести формулу.

студентка 2 курса магистратуры Кобзева В.М.

21 декабря 2020 г.

Какая теорема обеспечивает гиперболичность компактной ориентированной двумерной замкнутой поверхности? Привести формулу.

Поверхность X называется **гиперболической**, если в любой ее точке гауссова кривизна отрицательна. **Гауссова кривизна** – мера искривления поверхности в окрестности какой-либо её точки, равна произведению нормалей кривизны в главных направлениях. Для плоскости она равна нулю, на сфере – везде $\frac{1}{R^2}$, на торе есть точки с положительной, отрицательной и нулевой гауссовой кривизной.

Какая теорема обеспечивает гиперболичность компактной ориентированной двумерной замкнутой поверхности? Привести формулу.

Гиперболичность компактной ориентированной двумерной замкнутой поверхности обеспечивает **теорема Гаусса-Бонне**:

Теорема

Пусть Ω – компактное двумерное ориентированное риманово многообразие с гладкой границей $\partial\Omega$. Обозначим через K гауссову кривизну Ω и через k_g геодезическую кривизну $\partial\Omega$. Тогда

$$\int\limits_{\Omega} K\, d\sigma + \int\limits_{\partial\Omega} k_g\, ds = 2\pi\chi(\Omega),$$

где $\chi(\Omega)$ — эйлерова характеристика Ω.

В частности, если у Ω нет границы, получаем

$$\int\limits_{\Omega} K\, d\sigma = 2\pi\chi(\Omega)$$

Какая теорема обеспечивает гиперболичность компактной ориентированной двумерной замкнутой поверхности? Привести формулу.

Если поверхность деформируется, то её эйлерова характеристика не меняется, в то время как гауссова кривизна может меняться поточечно. Тем не менее, согласно формуле Гаусса-Бонне, интеграл гауссовой кривизны остаётся тот же.

Эйлерова характеристика – целочисленная характеристика топологического пространства. Эйлерова характеристика замкнутой ориентируемой поверхности связана с её родом γ (числом ручек, то есть числом торов в связной сумме, представляющей эту поверхность) соотношением

$$\chi = 2 - 2\gamma(n) = 2 - (n-4) * 2^{n-2} - 2 = (4-n) * 2^{n-2}$$

Чтобы посчитать, сколько ручек нужно добавить, чтобы растянуть граф без пересечения ребер (безсветофорная сеть), используется формула, где вместо n подставляется размерность графа $n-$мерного куба

$$\gamma(n) = (n-4) * 2^{n-3} + 1$$

Какая теорема обеспечивает гиперболичность компактной ориентированной двумерной замкнутой поверхности? Привести формулу.

Среди компактных поверхностей гиперболическими являются в точности те, которые имеют отрицательную Эйлерову характеристику, т.е. $\gamma > 1$. Т.о., гиперболическими являются все компактные поверхности, за исключением семи следующих: сфера, диск, кольцо, тор, лента Мебиуса, проективная плоскость, бутылка Клейна.